も異なる。折り畳みが不確定性より粗い所では波束は古典系の軌道に沿って運動し，引き伸ばされるであろう。ここでは量子系のリャプノフ数は古典系のそれと等しいであろう。それに対して折り畳みが不確定性より細かい所ではリャプノフ数への寄与はない。その結果平均として量子リャプノフ数は古典系のそれより小さな値となる。

現実の系ではカオスの構造は一様ではない。従って古典系におけるカオスが量子系に直ちに反映するとは限らない。量子リャプノフ数で，量子系でのカオスの強さを定量化できる。

レベルの統計理論とその問題点

KEK　湯　川　哲　之

Ⅰ．レベルの統計

孤立系の量子スペクトルの統計的性質は，原子核の中性子レゾナンスレベルのほかに，最近では原子や分子の吸収線，２次元ポテンシャル問題の固有値等に於いても研究されている。これらの研究をとうしてレベル密度のような大域的性質は，系のハミルトニアンに強く依存するが，レベル間隔分布のような局所的性質は，ハミルトニアンにあまりよらないユニバーサリティの存在する事が分かって来た。

レベル間隔分布は，Brody 分布

$$P_0(S) = \text{const.} * S^{\nu} \exp(-aS^{\nu+1})$$

で現象論的にパラメトライズされるが，原子核や原子分子のような複雑な系では$\nu=1$，即ち Wigner 分布で良くデータを再現する。又，２次元ポテンシャル系のような自由度の小さい場合には，νは古典軌道のストカスティックな度合い，例えば KS エントロピーなどと相関のあることが数値計算により得られている〔1〕。Wigner 分布を説明するような理論としては，以前から Ranndom Matrix Theory 中でもガウス型直交行列アンサンブル模型がその使いやすさ（数値的な意味で）から，多く研究がなされて来た。しかしアンサンブルの物理的意味や，与えられたハミルトニアンに対して適当なアンサンブルを選ぶ原理等，基本的なことは余り釈然とはしていない。

Ⅱ. 統計理論

アンサンブルの選択を系のダイナミカルな性質から求める試みは Dyson〔2〕に始まり，最近 Pechukas〔3〕や Yukawa〔4〕により一応の解答が得られたと考えている。即ち，定常 Schrödinger 方程式

$$H_t\,|\,n(t)> = X_n(t)\,|\,n(t)>, \qquad H_t = H_0 + tV,$$

の固有値 $x_n(t)$ を1次元多粒子系の座標と考えて，摂動パラメター t を“時間”とみなしその運動を考える。今，H及びVをHの固有関数 $|\,n(t)>$ で表現したときのそれぞれの行列を h 及び v とし，

$$m_{ij} = v_{ij}/(x_i - x_j), \qquad f = [h, v]$$

と定義すると，系の運動方程式は

$$dv/dt = [m, v], \qquad df/dt = [m, f]$$

のいわゆる Lax 形式でかける〔4〕。

この系の統計的性質，特に平衡状態の分布関数を求めるためにN個の連続する固有値のアンサンブルを考える。上の運動方程式は Liouville の定理を満たすことより

1　$d\Gamma = \prod_i dx_i \prod_i dv_{ii} \prod_{i>j} df_{ij}$ は不変測度であり，

2)　分布関数を ρ とすると $d\rho/dt = 0$ となる。

従って，定常状態 ($\partial\rho/\partial t = 0$) の分布関数は，保存量のみの関数として書かれていなければならない。

運動方程式が Lax 形式で書かれていることより明らかなように h と f で書かれた任意のオペレータのトレースは保存量となる。しかも h と f は互いに交換しないから，一般的な形で独立な保存量を書き下すことは容易ではない。今，適当な境界条件 (例えば，剛体壁とか周期的等) を与えたとき; 最も基本的な保存量として

$$K = 1/2\ \mathrm{Tr}(v^2) \qquad \text{“エネルギー”}$$

$$Q = -1/2\ \mathrm{Tr}(f^2) \qquad \text{“角運動量”}$$

が存在する。これにより得られた平衡状態の分布関数は

$$\mathrm{d}\rho \propto \exp(-\beta K - \gamma Q)$$

で与えられる。エネルギースペクトルの分布だけに興味がある場合は，不必要な変数 v_{ii} 及び f_{ij} について積分する。その結果

$$P(\{x_i\}) \propto \prod_{i>j} [(x_i - x_j)^2 / \{1 - \gamma/\beta(x_i - x_j)^2\}]^{1/2}$$

と書ける。この分布はパラメター γ/β が小さいときはGOEを，またそれが大きいときはポアソン分布を極限として持つ。数値計算によると〔1〕レベル間隔分布はBrody分布に近い結果を与える。

Ⅲ. 問題点

先ず身近な問題から考える。我々の考えている系の解はハミルトニアン

$$(H_0)_{ij} + t(V)_{ij}$$

を直交化することにより求まる。これはちょうど速度 $(V)_{ij}$，初期値 $(H_0)_{ij}$ で運動する N^2 個の自由粒子を群 $\mathrm{O}(N)$ 空間上，即ちハミルトニアン H を直交行列に留める変換の作る群上に束縛した系と同一であることより〔4〕，一般に $N(N+1)/2$ 個の保存量が存在する。従って平衡分布は K や Q 以外の保存量にも依存してよい。

すでに K や Q で局所的なゆらぎを説明することが出来ることより，他の保存量はもうすこし長距離の相関に寄与するものと考えられる。どのような物理量を見ればよいのだろうか？

基本的な問題として，量子カオスは存在するのか？もし，存在するとすればそれはどのように定義されるだろうか？これに答える必要がある。Krylovによれば〔5〕量子力学系は，完全可積分系であり従って混合性をもたない。このことは一見カオス状態の存在を否定していると考えられる。しかし，1次元自由粒子系のエルゴード性に対するSinaiらの証明〔6〕が示唆するように，無限次元完全可積分系の持つエルゴード的な性格を定量化することにより量子系のカオスを理解することが可能となるかもしれない。もちろんここでは全く触れなかった波動関数の振るまいに対する定量的な理解等も量子カオスの研究に欠かせないものである。

Ⅳ. 参考文献

1) T. Ishikawa and T. Yukawa, KEK preprint KEK=TH 109.
2) F. J. Dyson, J. Math. Phys. **3** (1962) 1191.
3) P. Pechukas, Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 943.
4) T. Yukawa, Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 1883.
5) N. S. Krylov, Foundation of Statistical Mechanics, Princeton, 1979.
6) Ya. G. Sinai and K. L. Volkoviiski, Funct. Anal. Appl. **5** (1971) 185.

強制非線型振動子における周期的カオスのスペクトル構造

九大・理　冨田浩治，吉田　健

周期倍化分岐をへて発生するカオスは，その発生過程の普遍性に対応して，少なくともその直後においては，普遍的構造を持つであろう。分岐でみれば，制御パラメターをカオス側から発生点へ向けて変化させると，アトラクターが次々に２つに分裂する分岐の主系列がある。このようなカオスを周期的カオスと呼ぶ。周期的カオスでは，非周期軌道の相関関数のパワースペクトルは，分裂した 2^m 個のアトラクターを一定の順序で動きまわることに由来する周期成分（線スペクトル）と，アトラクター内で二度と同じ点には来ないことによるカオス成分（連続スペクトル）とから成る。

いま，一次元写像系を考え，その写像関数を $f(x)$ とする。アトラクターが 2^m 個に分裂する分岐点を a_m と書く。$a=a_{m-1}$ での $f(x)$ と $a=a_m$ での $f(x)$ の２回写像 $f^2(x)$ との相似性に着目すれば，$a=a_m$ でのスペクトルの各成分と $a=a_{m-1}$ での対応するスペクトルとを関係づける漸化式が求まる[1]。図を描いてみればすぐわかるように，上記の相似について，２個の相対比がある。それを α_1，α_2 と書き，スケール因子と呼ぶ。テント写像

$$f(x)=\begin{cases} ax & [\,0\leqq x\leqq b/(a+b)\,] \\ b(1-x) & [\,b/(a+b)<x\leqq 1\,] \end{cases}$$

では，

$$\alpha_1=a(b+1)/(a-1),\qquad \alpha_2=-a(b+1)/b(a-1)$$